

8. Zadana je ploha $\vec{r}(u, v) = u\vec{a} + \sin u\vec{b} + v\vec{c}$, $u, v \in \mathbb{R}$ gdje su \vec{a} , \vec{b} i \vec{c} dati vektori.
- Ispitati šta su koordinatne krive.
 - Odrediti koeficijente E , F i G prve kvadratne forme.
 - Kada će se koordinatne krive ove plohe sijeći ortogonalno?
 - Naći element površine dS dane plohe.

9. Naći površinu četverougla na helikoidu $x = au \cos v$, $y = au \sin v$, $z = bv$ (gdje su $u, v \in \mathbb{R}$), ograničenog krivima $u = 0$, $u = \frac{b}{a}$, $v = 0$, $v = 1$.

10. Naći površinu torusa $x = (a + b \cos u) \cos v$, $y = (a + b \cos u) \sin v$, $z = b \sin u$, $u, v \in [0, 2\pi]$.

11. Površ Γ definisana je vektorskom jednačinom

$$\vec{r} = (u \sin v, u \cos v, v).$$

- Naći prvu kvadratnu formu površi.
- Na površi je zadan krivolinijski trougao

$$0 \leq u \leq \operatorname{sh} v, \quad 0 \leq v \leq v_0.$$

Izračunati površinu i dužine strana trougla.

12. Odrediti izraz za površinu zatvorenog područja (K) na površi $z = z(x, y)$.

14 Druga diferencijalna forma površi

Druga osnovna forma površi je

$$F_2 = (d^2\vec{r} \cdot \vec{n}_0) = -(d\vec{r} \cdot d\vec{n}_0) = Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2$$

gdje je

$$d^2\vec{r} = \vec{r}''_{uu} du^2 + 2\vec{r}''_{uv} dudv + \vec{r}''_{vv} dv^2.$$

Primjetimo da vrijedi $L = \vec{n}_0 \cdot \vec{r}''_{uu} = \frac{1}{W} \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}, \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial u^2} \right)$, $M = \vec{n}_0 \cdot \vec{r}''_{uv} = \frac{1}{W} \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}, \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial u \partial v} \right)$, $N = \vec{n}_0 \cdot \vec{r}''_{vv} = \frac{1}{W} \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}, \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial v^2} \right)$, odnosno koordinatno

$$L = \frac{1}{W} \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} & \frac{\partial^2 y}{\partial u^2} & \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} \end{vmatrix}, \quad M = \frac{1}{W} \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} & \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} & \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} \end{vmatrix}, \quad N = \frac{1}{W} \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} & \frac{\partial^2 y}{\partial v^2} & \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \end{vmatrix}$$

Funkcije L , M i N nazivamo Gausovim osnovnim (fundamentalnim) veličinama drugog reda ($W = \sqrt{EG - F^2}$).

13. Naći drugu kvadratnu formu za zavojnu plohu (helikoid)

$$x = au \cos v, \quad y = au \sin v, \quad z = bv, \quad u, v \in \mathbb{R}.$$

14. Pokazati: (a) da je druga kvadratna forma ravni identički jednaka nuli. (b) da je druga kvadratna forma sfere proporcionalna prvoj.

15. Naći drugu diferencijalnu formu površi zadane jednačinom $z = f(x, y)$.

16. Naći drugu kvadratnu formu za rotacionu površ $\vec{r} = (\phi(u) \cos v, \phi(u) \sin v, \psi(u))$.